От автора

В 7 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – алгебру. Поэтому цель обучения – развить интерес к решению алгебраических задач и показать применимость алгебраического подхода в других изучаемых в школе дисциплинах – геометрии, физике, химии и т. д. В курсе алгебры 7 класса начинают изучать основные понятия: алгебраические выражения и их преобразования, одночлены и многочлены и действия с ними (включая формулы сокращенного умножения), уравнения и способы их решения, системы уравнений и способы их решения, функции и графики функций. В последующих классах они будут уточняться и дополняться, но основы закладываются именно в начале обучения (в 7 классе).

Настоящее пособие адресовано прежде всего преподавателям, работающим по учебнику Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение), и рассчитано на 102 урока (34 учебные недели). Нумерация задач в поурочном планировании приведена в соответствии с данным учебником.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: дано представление о нелинейных уравнениях и системах нелинейных уравнений, об уравнениях и системах уравнений, содержащих модули и параметры, о построении графиков более сложных функций и уравнений, добавлены формулы сокращенного умножения: куб суммы и куб разности. Такое расширение материала вполне доступно для семиклассников, развивает их интерес к изучению алгебры и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к углубленному изучению математики в старших классах.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор каждой определяется или учителем, или учеником. При этом за выполнение более сложного варианта контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора учащихся.

В пособии представлены 10 контрольных работ. Зачетные работы приведены для коррекции результатов последних. Задачи разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Нужное для получения оценки число задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей отметки необходимо решить не более половины задач варианта, поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора при решении. В пособии даны также 6 зачетных работ по темам.

В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, проверяющая навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Контрольные и зачетные работы приведены с полным разбором задач. Предполагается размещение данных решений на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Для текущего контроля усвоения понятий и овладения основными навыками и умениями предусмотрены письменные опросы и самостоятельные работы (практически на каждом уроке).

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

В качестве дополнительного материала к урокам учитель может использовать издания:

- Контрольно-измерительные материалы. Алгебра. 7 класс / Сост. Л.И. Мартышова. М.: ВАКО, 2016.
- Рурукин А.Н. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре. 7 класс. М.: ВАКО, 2016.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, пусть каждый отдельный ученик лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домочадцы, ученики начинают списывать, подсказывать друг другу, использовать шпаргалки и т. д.

Содержание уроков в данном пособии является избыточным (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала следует опустить либо изложить достаточно поверхностно. С учетом несобранности и неорганизованности семиклассников желательно иметь в расписании сдвоенные уроки алгебры, особенно при написании контрольных работ и сдаче тематических зачетов.

Поурочное планирование включает в себя четыре основных вида занятий:

1) урок изучения нового материала;

2) урок отработки и закрепления пройденного материала;

3) контрольная работа;

4) тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. ***Урок изучения нового материала*** включает в себя следующие этапы.

I. Сообщение темы и цели урока (≈ 1–2 мин). Следует донести до учащихся необходимость данной темы (области применения этих знаний) и сообщить цель занятия (навыки и приемы, которыми ученики должны овладеть в ходе проведения урока).

II. Работа по теме урока (≈ 15 мин). Здесь возможны два подхода:

1) с помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя учащиеся самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем педагог уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что изучение алгебры начинается именно в 7 классе и все понятия для учеников незнакомы, такой подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем либо отдельных фрагментов урока;

2) учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но является недостаточно эффективным (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Задания на уроке учитель дает из числа наиболее характерных, типовых задач (≈ 15 мин). Они могут выполняться:

1) самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором одним из учеников (например, первым

выполнившим) у доски; при этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, предложение других способов решения и т. д.;

2) в ходе диалога учеников, сидящих за одной партой (выполнение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка);

3) у доски одним или несколькими учащимися.

После выполнения заданий возможен как взаимоконтроль учеников у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и диалог учителя с отвечающим у доски.

IV. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания новых понятий, терминов и т. д. (≈ 5 мин). Вопросы можно адресовать как одному ученику, так и всему классу. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется попросить учащегося, кроме определения, привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие ученики или учитель.

V. Творческие задания (предусмотрены во многих уроках). От приведенных в учебнике они отличаются или *большей сложностью*, или *нестандартностью формулировки*, или *новым способом решения*. Поэтому очень полезно разобрать подобные задания. В зависимости от подготовленности класса они могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания на уроке, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными учениками или на уроке, или дома;

4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного на урок времени.

VI. Подведение итогов урока (≈ 1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы учеников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Домашнее задание дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 30–40 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задач. Это способствует активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

Необходимо приучить учащихся при выполнении домашнего задания фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить учеников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на него. Особенно такие навыки понадобятся учащимся в старших классах. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по алгебре.

2. ***Урок на отработку и закрепление пройденного материала*** отличается этапом II, который предусматривает повторение и закрепление пройденного материала (≈ 20 мин). Прежде всего, данный этап включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы их задавали сами учащиеся. Вопросы могут содержать непонятые определения, термины и другой теоретический материал.

Скорее всего, понадобится и разбор нерешенных задач. В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Ученик, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время, отведенное на эту стадию этапа II, составляет ≈ 5–10 мин.

На второй стадии данного этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ≈ 10–15 мин.

Задания для *письменного опроса* содержат теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданиям, выполненным в классе, и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на понимание учеником тех или иных понятий, а не на строгость и четкость формулировок (к ним учащиеся придут в старших классах).

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, характерные задачи.

В материалах уроков тесты не содержатся. Это связано с тем, что учащиеся 7 класса очень часто ошибаются. Тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в усвоении предыдущего материала, арифметические ошибки и т. д. Поэтому тестирование целесообразно в более старших классах (да и то при контроле усвоения лишь определенных тем).

3. По каждой изучаемой теме приводятся одна или две ***контрольные работы***. Они представлены в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – средней сложности, варианты 5, 6 – самые сложные).

Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи, приведенные в контрольных работах, подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор варианта делают или сами учащиеся (с учетом их самооценки), или учитель (с учетом успехов учеников).

Оценка контрольной работы может быть осуществлена следующим образом: при выполнении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 к набранным баллам добавляются дополнительно 0,5 балла, за решение задач вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая бóльшую их сложность).

Контрольная работа рассчитана на один урок (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы).

После каждой контрольной работы проводится ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем задачам вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. По окончании контрольной работы желательно представить на стенде в классе разбор задач всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценивания выполнения контрольной работы.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать ученикам возможность повышения оценок, еще раз повторить и закрепить пройденную тему на последнем занятии, факультативно проводится письменный ***тематический зачет***. На проведение зачета желательно выделить два урока.

Задания тематического зачета даны в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три блока: блок А содержит самые простые задачи, блок В – более сложные и блок С – самые сложные. Каждая задача из блока А оценивается 1 баллом, из блока В – 2 баллами, из блока С – 3 баллами. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, «4» – за 10 баллов, «5» – за 14 баллов.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока
Глава I. ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ (22 ч)	
§ 1. Выражения (5 ч)	
1	Числовые (арифметические) выражения
2	Вычисление числовых выражений (десятичные дроби)
3	Выражения с переменными
4	Допустимые значения переменных в выражениях. Формулы
5	Сравнение значений выражений
§ 2. Преобразование выражений (5 ч)	
6	Свойства действий над числами
7	Тождества
8, 9	Тождественные преобразования выражений
10	Контрольная работа № 1 по теме «Числовые и алгебраические выражения. Тождественные преобразования выражений»
§ 3. Уравнения с одной переменной (7 ч)	
11, 12	Уравнение и его корни
13	Линейное уравнение с одной переменной
14	Решение линейных уравнений
15–17	Решение задач с помощью уравнений
§ 4. Статистические характеристики (5 ч)	
18, 19	Среднее арифметическое, размах и мода
20, 21	Медиана как статистическая характеристика
22	Контрольная работа № 2 по теме «Уравнения с одной переменной»
Глава II. ФУНКЦИИ (11 ч)	
§ 5. Функции и их графики (5 ч)	
23	Что такое функция
24, 25	Вычисление значений функций по формуле
26, 27	График функции
§ 6. Линейная функция (6 ч)	
28, 29	Прямая пропорциональность и ее график
30, 31	Линейная функция и ее график
32	Взаимное расположение графиков линейных функций

№ урока	Тема урока
33	Контрольная работа № 3 по теме «Функции»
Глава III. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ (11 ч)	
§ 7. Степень и ее свойства (5 ч)	
34	Определение степени с натуральным показателем
35, 36	Умножение и деление степеней
37, 38	Возведение в степень произведения и степени
§ 8. Одночлены (6 ч)	
39	Одночлен и его стандартный вид
40, 41	Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень
42, 43	Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики
44	Контрольная работа № 4 по теме «Степень с натуральным показателем»
Глава IV. МНОГОЧЛЕНЫ (17 ч)	
§ 9. Сумма и разность многочленов (3 ч)	
45	Многочлен и его стандартный вид
46, 47	Сложение и вычитание многочленов
§ 10. Произведение одночлена и многочлена (7 ч)	
48	Умножение одночлена на многочлен
49, 50	Использование умножения одночлена на многочлен при преобразовании алгебраических выражений и решении уравнений
51–53	Вынесение общего множителя за скобки
54	Контрольная работа № 5 по теме «Сумма и разность многочленов. Произведение одночлена и многочлена»
§ 11. Произведение многочленов (7 ч)	
55, 56	Умножение многочлена на многочлен
57, 58	Разложение многочлена на множители способом группировки
59, 60	Доказательство тождеств
61	Контрольная работа № 6 по теме «Многочлены»
Глава V. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ (19 ч)	
§ 12. Квадрат суммы и квадрат разности (5 ч)	
62	Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений
63, 64	Возведение в куб суммы и разности двух выражений
65, 66	Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

№ урока	Тема урока
§ 13. Разность квадратов. Сумма и разность кубов (7 ч)	
67, 68	Умножение разности двух выражений на их сумму
69, 70	Разложение разности квадратов на множители
71, 72	Разложение на множители суммы и разности кубов
73	Контрольная работа № 7 по теме «Квадрат суммы и разности. Разность квадратов. Сумма и разность кубов»
§ 14. Преобразование целых выражений (7 ч)	
74, 75	Преобразование целого выражения в многочлен
76, 77	Применение различных способов для разложения на множители
78, 79	Применение преобразований целых выражений
80	Контрольная работа № 8 по теме «Формулы сокращенного умножения»
Глава VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (14 ч)	
§ 15. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы (5 ч)	
81	Линейное уравнение с двумя переменными
82, 83	График линейного уравнения с двумя переменными
84, 85	Системы линейных уравнений с двумя переменными
§ 16. Решение систем линейных уравнений (9 ч)	
86–88	Способ подстановки
89–91	Способ сложения
92, 93	Решение задач с помощью систем уравнений
94	Контрольная работа № 9 по теме «Системы линейных уравнений»
ПОВТОРЕНИЕ КУРСА 7 КЛАССА (8 ч)	
Подготовка к итоговой контрольной работе	
95	Повторение темы «Выражения. Тождества. Уравнения»
96	Повторение темы «Функции»
97	Повторение темы «Степень с натуральным показателем»
98	Повторение темы «Многочлены»
99	Повторение темы «Формулы сокращенного умножения»
100	Повторение темы «Системы линейных уравнений»
101	Итоговая контрольная работа
102	Подведение итогов обучения

Глава I
ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

§ 1. ВЫРАЖЕНИЯ

Урок 1. Числовые (арифметические) выражения

Цели: ознакомить с числовыми выражениями и основными понятиями; напомнить, как выполнять действия над обыкновенными дробями.

Планируемые результаты: усвоить понятия числового выражения и его значения, выражения, не имеющего смысла; вспомнить действия над обыкновенными дробями.

Тип урока: урок повторения изученного материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Числовое выражение.
2. Значение числового выражения.
3. Обыкновенные дроби и действия над ними.

1. Числовое выражение

Запись, составленная из чисел с помощью арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень) и скобок, называется числовым (арифметическим) выражением. В частности, сами числа также можно рассматривать как числовые выражения.

Пример 1

Числовые выражения:

а) $5^2 - 3$;

б) $(2^3 + 4) : 6$;

в) $[3 + 2 \cdot (6 - 3)] : 5$;

г) 3;

д) $-2\frac{1}{11}$.

(Учитель просит учащихся привести свои примеры числовых выражений.)

Очень часто числовые выражения возникают при решении задач с текстовым содержанием.

Пример 2

В саду на даче растут 5 яблонь, 4 вишни и 3 сливы. Было собрано по 30 кг плодов с яблони, 10 кг – с вишни и 15 кг – со сливы. Какой урожай фруктов и ягод собрали в саду?

Решение

Так как с каждой яблони было собрано 30 кг плодов, то с 5 яблонь собрали $30 \cdot 5$ кг. Так как с каждой вишни было собрано 10 кг плодов, то с 4 вишен собрали $10 \cdot 4$ кг. Так как с каждой сливы было собрано 15 кг, то с 3 слив собрали $15 \cdot 3$ кг. Общий урожай фруктов и ягод равен сумме собранных плодов с яблонь, вишен и слив, т. е. $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$.

Решая задачу, получили числовое выражение

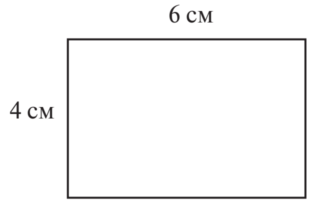
$30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$.

Забегая вперед, вычислим значение этого выражения:

$30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3 = 150 + 40 + 45 = 235$ (кг).

Пример 3

Найдите периметр (сумму длин всех сторон) прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см.



Решение

1-й способ

Можно посчитать непосредственно сумму длин сторон прямоугольника. Тогда получаем числовое выражение $4 + 6 + 4 + 6$ или $6 + 4 + 6 + 4$ (в зависимости от того, с какой стороны считаем сумму длин сторон).

2-й способ

Найдем сумму длин меньших сторон ($4 \cdot 2$ см) и сумму длин больших сторон ($6 \cdot 2$ см). Тогда сумма длин всех сторон (периметр прямоугольника) описывается числовым выражением $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2$.

3-й способ

Найдем полупериметр прямоугольника – сумму длин меньшей и большей сторон: $4 + 6$. Учтем, что прямоугольник имеет две меньшие и две большие стороны. Тогда периметр описывается числовым выражением $2 \cdot (4 + 6)$.

Периметр прямоугольника равен 20 см.

Таким образом: а) по условию задачи можно составить разные числовые выражения; б) независимо от формы записи числового выражения результат его вычисления будет один и тот же (учитывая свойства арифметических действий).

Пример 4

Поезд ехал сначала 50 мин со скоростью 60 км/ч, затем остановился на станции на 10 мин, после чего двигался еще 1 ч со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость движения поезда.

Решение

В соответствии с определением средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному на этот путь времени.

Вычислим путь и время движения. Прежде всего, учтем, что 50 мин $= \frac{50}{60}$ ч $= \frac{5}{6}$ ч, 10 мин $= \frac{10}{60}$ ч $= \frac{1}{6}$ ч (приведение к одинаковым единицам измерения времени). В начале движения был пройден путь $60 \cdot \frac{5}{6}$ (км), в конце движения – путь $40 \cdot 1$ (км).

Общий пройденный путь описывается числовым выражением $60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1$ (км).

Время, затраченное на этот путь (включая время на остановку), описывается числовым выражением $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1$ (ч).

Тогда средняя скорость движения описывается числовым выражением

$$\frac{60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1}{\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1}.$$

Вычислим значение этого выражения: $\frac{50 + 40}{2} = 45$ (км/ч).

2. Значение числового выражения

Число, которое получается в результате выполнения арифметических действий в числовом выражении, называется значением числового выражения.

Может оказаться, что в числовом выражении какое-то действие невыполнимо, тогда выражение не имеет смысла. Пока вам известно только одно невыполнимое действие – деление на нуль (в дальнейшем вы узнаете и другие такие действия: извлечение корня четной степени из отрицательных чисел, нахождение логарифма неположительных чисел и т. д.).

Пример 5

Найдите значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$.

Решение

Выполним действия в данном выражении:

$$\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7} = \frac{25 - 18}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Итак, значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$ равно 1.

Пример 6

Найдите значение числового выражения:

а) $(5^3 - 1) : (15 - 3 \cdot 5)$;

б) $\frac{9^2 - 3 \cdot 5 + 1}{2^3 - 9 + 1}$.

Решение

Данные числовые выражения не имеют смысла, так как делить на нуль нельзя.

3. Обыкновенные дроби и действия над ними

(Необходимо вкратце напомнить учащимся о том, как выполнять действия над дробями.)

Обыкновенной дробью называется число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Например: $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{18}$; $\frac{26}{3}$; $\frac{1}{8}$.

Число m называют *числителем*, число n — *знаменателем* дроби. Всякое целое число можно рассматривать как обыкновенную дробь со знаменателем 1. Например: $4 = \frac{4}{1}$; $0 = \frac{0}{1}$; $3 = \frac{3}{1}$.

При действиях над дробями используется *основное свойство* дроби: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится дробь, равная данной дроби. Например:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}; \quad \frac{28}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{4}{5}.$$

Сокращение дроби: нужно числитель и знаменатель разложить на простые множители, найти их наибольший общий делитель (НОД) и поделить числитель и знаменатель на НОД.

Пример 7

Сократите дробь $\frac{105}{147}$.

Решение

Раскладываем числитель и знаменатель на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$. Находим НОД чисел 105 и 147: НОД $(105, 147) = 3 \cdot 7 = 21$. Используя основное свойство дроби, делим ее числитель и знаменатель на НОД. Получаем

$$\frac{105}{147} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Приведение дроби к другому знаменателю: нужно числитель и знаменатель умножить на дополнительный множитель.

Пример 8

Приведите дробь $\frac{5}{7}$ к знаменателю 42.

Решение

Старый (7) и новый (42) знаменатели различаются в 6 раз. Поэтому в соответствии с основным свойством дроби числитель и знаменатель данной дроби умножим на дополнительный множитель 6. Получаем $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$.

Приведение нескольких дробей к общему знаменателю: нужно найти общий знаменатель дробей (он равен наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей всех дробей) и привести каждую дробь к этому знаменателю (аналогично примеру 8).

Пример 9

Приведите дроби $\frac{4}{105}$ и $\frac{31}{147}$ к общему знаменателю.

Решение

Раскладываем знаменатели дробей на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $147 = 3 \cdot 7^2$. Находим НОК чисел 105 и 147: НОК $(105, 147) = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 735$. Число 735 будет общим знаменателем данных дробей. Находим дополнительный множитель для каждой дроби. Для этого поочередно делим общий знаменатель на знаменатель каждой дроби.

Получаем дополнительный множитель к первой дроби: $\frac{735}{105} = 7$ – и ко второй дроби: $\frac{735}{147} = 5$. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на найденный дополнительный множитель. Получаем $\frac{4}{105} = \frac{4 \cdot 7}{105 \cdot 7} = \frac{28}{735}$ и $\frac{31}{147} = \frac{31 \cdot 5}{147 \cdot 5} = \frac{155}{735}$.

Сложение (вычитание) дробей: нужно сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями. При этом знаменатель суммы (разности) остается прежним, а числители складываются (вычитаются). Если дроби имеют разные знаменатели, их предварительно приводят к общему знаменателю.

Пример 10

Выполните действия:

а) $\frac{4}{105}+\frac{31}{147}$; б) $\frac{4}{105}-\frac{31}{147}$.

Решение

а) В предыдущем примере эти дроби уже были приведены к общему знаменателю. Поэтому получаем

$$\frac{4}{105}+\frac{31}{147}=\frac{28}{735}+\frac{155}{735}=\frac{28+155}{735}=\frac{183}{735}.$$

Полученную дробь можно сократить:

$$\frac{183}{735}=\frac{3\cdot 61}{3\cdot 5\cdot 7^2}=\frac{61}{5\cdot 7^2}=\frac{61}{245}.$$

б) Разность данных дробей:

$$\frac{4}{105}-\frac{31}{147}=\frac{28}{735}-\frac{155}{735}=\frac{28-155}{735}=-\frac{127}{735}.$$

Вспомним еще некоторые понятия.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется правильной. Например: $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{13}$.

Дробь, у которой числитель больше знаменателя либо равен ему, называется неправильной. Например: $\frac{25}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{6}{6}$.

Из неправильной дроби можно выделить целую часть. Например: $\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$; $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$; $\frac{6}{6}=1$.

Число, состоящее из целой и дробной части, называется смешанным.

В ряде случаев сложение и вычитание смешанных чисел удобно выполнять отдельно с целыми и дробными частями.

Пример 11

Сложите числа $7\frac{1}{3}$ и $3\frac{1}{6}$.

Решение

Получаем

$$7\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}=(7+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=10+\frac{2+1}{6}=10+\frac{3}{6}=10+\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}.$$

При умножении дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению знаменателей дробей. Если возможно, то полученную дробь надо сократить. При умножении смешанные числа обращают в неправильные дроби.

Пример 12

Перемножьте числа $\frac{5}{29}$ и $3\frac{13}{15}$.

Решение

Прежде всего, смешанное число $3\frac{13}{15}$ обратим в неправильную дробь: $3\frac{13}{15} = 3 + \frac{13}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 13}{15} = \frac{58}{15}$.

Умножим дроби $\frac{5}{29}$ и $\frac{58}{15}$, получим

$\frac{5}{29} \cdot \frac{58}{15} = \frac{5 \cdot 58}{29 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 29}{29 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$.

Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице. Например: 7 и $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$; $2\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$.

При делении дробей надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 13

Разделите дробь $\frac{17}{35}$ на число $1\frac{2}{49}$.

Решение

Обратим смешанное число $1\frac{2}{49}$ в неправильную дробь:

$1\frac{2}{49} = 1 + \frac{2}{49} = \frac{1 \cdot 49 + 2}{49} = \frac{51}{49}$.

Разделим дробь $\frac{17}{35}$ на дробь $\frac{51}{49}$, получим

$\frac{17}{35} : 1\frac{2}{49} = \frac{17}{35} : \frac{51}{49} = \frac{17}{35} \cdot \frac{49}{51} = \frac{17 \cdot 49}{35 \cdot 51} = \frac{17 \cdot 7^2}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}$.

III. Задания на уроке

1. Составьте числовые выражения, которые:

а) имеют смысл;

б) не имеют смысла.

Если выражение имеет смысл, то найдите его значение.

(Можно рекомендовать парную работу (например, соседи по парте): каждый учащийся определяет, имеет ли смысл выражение, записанное соседом, и объясняет почему. Если выражение имеет смысл, то находит его значение.)

Обратите внимание на то, что количество открывающихся и закрывающихся скобок, используемых в выражении, должно быть одинаковым.

2. По текстовой задаче составьте числовое выражение (по аналогии с примерами 4–6) и вычислите его значение.

(Учитель предлагает текстовую задачу.)

3. Обратная задача: по написанному простому числовому выражению составьте текстовую задачу.

(Учитель предлагает числовое выражение. Можно рекомендовать парную работу: соседи пишут выражения и обмениваются тетрадями, после этого составляют задачу по чужому выражению.)

4. Выполните действия (сложение и вычитание):

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$;

б) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$;

в) $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$;

г) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$;

д) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}$;

е) $3\frac{1}{3}+4\frac{2}{5}$;

ж) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$;

з) $\frac{4}{7}-\frac{6}{7}$;

и) $\frac{5}{7}-\frac{3}{5}$;

к) $\frac{7}{9}-\frac{9}{10}$;

л) $4\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}$;

м) $2\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}$;

н) $5\frac{1}{6}-2\frac{1}{4}$;

о) $3\frac{1}{7}-1\frac{1}{3}$.

5. Выполните действия (умножение, деление, возведение в степень):

а) $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}$;

б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}$;

в) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}$;

г) $\frac{6}{7}\cdot1\frac{2}{5}$;

д) $2\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{11}$;

е) $3\frac{2}{5}\cdot1\frac{3}{17}$;

ж) 3^2;

з) 4^3;

и) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

к) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$;

л) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$;

м) $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$;

н) $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$;

о) $\frac{2}{15}:\frac{8}{5}$;

п) $\frac{5}{8}:\left(-\frac{15}{4}\right)$;

р) $\left(-1\frac{1}{3}\right):\left(2\frac{1}{3}\right)$;

с) $5\frac{1}{3}:\frac{8}{9}$;

т) $\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-5\frac{3}{2}\right)$;

у) $\left(-4\frac{1}{6}\right):5$;

ф) $6:\left(-1\frac{1}{2}\right)$.

IV. Контрольные вопросы

(Опрос учащихся.)

– Что называется числовым выражением?

– В каком случае числовое выражение не имеет смысла?

– Что называется значением числового выражения?

– Какое число называется обыкновенной дробью?

– Назовите основное свойство дроби.

– Как сократить дробь?
– Как привести дроби к общему знаменателю?
– Как складываются (вычитаются) дроби?
– Какая дробь называется правильной? неправильной?
– Какое число называется смешанным?
– Как умножаются дроби? смешанные числа?
– Какие числа являются взаимно обратными?
– Как делятся дроби? смешанные числа?

V. Творческие задания

(Творческие задания можно использовать на уроке или дома.)

1. Используя четыре раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно 1, 2, 3, ..., 9 (если это возможно).

Например:

$2 : 2 + 2 - 2 = 1$;

$2 : 2 + 2 : 2 = 2$;

$(2 + 2 + 2) : 2 = 3$;

$(2 + 2) + 2 - 2 = 4$;

$2 + 2 + 2 : 2 = 5$ и т. д.

2. Установите закономерность и напишите три следующих числа в последовательности:

а) 3, 5, 7, 9, ... (арифметическая прогрессия, каждый член на два больше предыдущего);

б) 2, 5, 8, 11, ... (арифметическая прогрессия, каждый член на три больше предыдущего);

в) 3, 6, 12, 24, ... (геометрическая прогрессия, каждый член в два раза больше предыдущего);

г) 2, 6, 18, 54, ... (геометрическая прогрессия, каждый член в три раза больше предыдущего);

д) 1, 4, 9, 16, ... (квадраты натуральных чисел);

е) 1, 8, 27, 64, ... (кубы натуральных чисел);

ж) 1, 2, 3, 5, 8, ... (каждый член равен сумме двух предыдущих);

з) 1, 3, 4, 7, 11, ... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

3. Найдите сумму дробей:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 101}$;

в) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{98 \cdot 100}$.

Решение

а) Надо учесть, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

(в сумме сокращаются все дроби, кроме первой и последней).

(*Ответ:* $\frac{99}{100}$.)

б) Надо учесть, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right); \ \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right); \ \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right); \ \ldots;$$

$$\frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right).$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}.$$

(*Ответ:* $\frac{50}{101}$.)

в) Надо учесть, что

$$\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right); \ \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right); \ \frac{1}{6 \cdot 8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right); \ \ldots;$$

$$\frac{1}{98 \cdot 100} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right).$$

Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) = \frac{49}{200}.$$

(*Ответ:* $\frac{49}{200}$.)

4. Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя? Если да, приведите пример.

(*Ответ*. Может. Например: $\frac{-3}{6} = \frac{5}{-10}$.)

5. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 7 – остаток 6.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это число будет без остатка делиться на указанные числа: 2, 3, 5, 7. Эти числа простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 5, 7, – произведение этих чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Искомое число на единицу меньше, т. е. $210 - 1 = 209$.

6. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 8 – остаток 7.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это число будет без остатка делиться на указанные числа: 2, 3, 4, 8. Однако эти числа не взаимно простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 4, 8, равно НОК этих чисел. НОК (2, 3, 4, 8) = $3 \cdot 8 = 24$. Искомое число на единицу меньше, т. е. $24 - 1 = 23$.

7. Найдите сумму чисел:

а) $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$.

(*Ответ:* 5050.)

Решение

Слагаемые являются членами арифметической прогрессии. Поэтому удобно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе – с предпоследним и т. д. Получаем $S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... = 101 + 101 + ... + 101 = 101 \cdot 50 = 5050$.

б) $1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99$.

(*Ответ:* 2500.)

в) $2 + 4 + 6 + ... + 98 + 100$.

(*Ответ:* 2550.)

8. Один рыбак поймал 3 рыбины, второй – 5 рыбин. Из этих рыбин сварили уху. Мимо рыбаков шел прохожий, и рыбаки пригласили его пообедать. После того как уха была съедена рыбаками и прохожим, прохожий дал рыбакам 80 руб. за уху. Как по справедливости рыбаки должны поделить эти деньги?

Решение

Очевидно, что поровну (по 40 руб.) делить деньги нельзя, так как рыбаки для ухи дали разное количество рыбы. Но нельзя также первому рыбаку дать 30 руб., а второму – 50 руб., так как рыбаки и сами ели уху (такой дележ был бы справедливым, если бы рыбаки просто продали прохожему свою рыбу). На уху пошло 8 рыбин. Прохожий заплатил за то, что съел сам, т. е. за третью часть от 8 рыбин. Тогда все 8 рыбин стоят в три раза дороже, т. е. $80 \cdot 3 = 240$ (руб.). Значит, одна рыбина стоит 30 руб. Поэтому 3 рыбины первого рыбака стоят $30 \cdot 3 = 90$ (руб.). Но сам рыбак съел ухи на 80 руб., и ему причитается $90 - 80 = 10$ (руб.). У второго рыбака 5 рыбин стоят $30 \cdot 5 = 150$ (руб.). Но и этот рыбак съел ухи на 80 руб., и ему причитается $150 - 80 = 70$ (руб.). Следовательно, справедливый дележ таков: первому рыбаку – 10 руб., второму – 70 руб.